22/11/18

Καλα διατεταγμενα συνολα

Ορισμος

Εστω $(E, \leq)$ ενα διατεταγμενο συνολο. Το E ονομαζεται καλα διατεταγμενο αν καθε μη κενο υποσυνολο του E εχει ελαχιστο στοιχειο

Παραδειγμα

Το $\mathbb{N}$ με τη συνηθη διαταξη ειναι καλα διατεταγμενο
Αντιθετα τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ δεν ειναι καλα διατεταγμενα

Παρατηρηση

Καθε καλα διατεταγμενο συνολο $(E, \leq)$ ειναι γραμμικά διατεταγμενο

Αποδειξη

Εστω $x, y \in E$ τυχαια. Το $\{x, y\}$ εχει ελαχιστο στοιχειο
Αν $\min\{x, y\} = x$ τοτε $x \leq y$
Αν $\min\{x, y\} = y$ τοτε $y \leq x$

Θεωρημα (ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ)

Εστω $(E, \leq)$ καλα διατεταγμενο συνολο και $A \subseteq E$
Αν για καθε $y \in E$ ισχυει:
$$\{x \in E, x < y\} \subseteq A \Rightarrow y \in A$$
Τοτε $A = E$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Αν P είναι μια ιδιότητα που αφορά στοιχεία του E
και κάθε $y \in E$,
$\forall y \in E$ ισχύει η συνεπαγωγή $[P(x)\ \forall x < y] \Rightarrow P(y)$
τότε $P(x)$ για κάθε $x \in A$

Απόδειξη

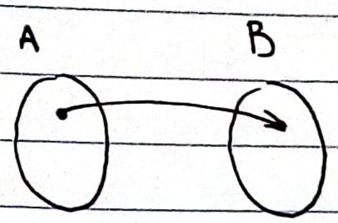
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $A \neq E$
τότε το $A^c = E \setminus A$ είναι μη κενό.
Αφού το $(E, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο
το A^c θα έχει ελάχιστο στοιχείο
Θέτουμε $y = \min A^c$
Τότε για κάθε $x \in E$ με $x < y$ έχουμε $x \notin A^c$
άρα $x \in A$. Έτσι $\{x \in E \ \ x < y\} \subseteq A$
Άρα από υπόθεση $y \in A$. Άτοπο, διότι $y \in A^c$
επομένως $A = E$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σ' ένα σύνολο B
λέγεται κάθε σχέση $f \subseteq A \times B$ για την οποία
(i) $\forall x \in A\ \exists y \in B \quad (x, y) \in f$ [δηλ: $D(f) = A$]
(ii) Για κάθε $x \in A$ και $y, z \in B$
Αν $[\ (x,y) \in f$ και $(x,z) \in f]$ τότε $z = y$

Απλάδη η συνάρτηση f από το A στο B είναι
μια σχέση που σε κάθε $x \in A$ εμφανίζεται σε ακριβώς
ένα από τα διατεταγμένα ζεύγη που αποτελούν την
f.



Για κάθε $x \in A$ το μοναδικό $y \in B$ για το οποίο $(x,y) \in f$ καλείται τιμή της f στο x (ή Εικόνα της f στο x) και συμβολίζεται με $f(x)$.

Έτσι,

$$(x,y) \in f \Longleftrightarrow y = f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$x f y$$

Για μια συνάρτηση $f \subseteq A \times B$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f: A \to B$ και λέμε ότι:

το A είναι το πεδίο ορισμού της f

το B είναι το πεδίο τιμών της f

Ορισμός

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Θα λέμε ότι:

(α) η f είναι επί (ή επί του B) αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = y$.

(β) η f είναι 1-1 (ή αμφιμονοσήμαντη) αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ότι αν $f(x) = f(y)$ τότε $x = y$.
(ή ισοδύναμα αν $x \neq y$ τότε $f(x) \neq f(y)$)

Συμβολισμός

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B παριστάνεται με $\mathcal{F}(A,B)$

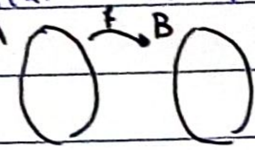
ή B^A

Παρατηρήσεις

(2) Αν $f: A \to B$, $g: A \to B$ δυο συναρτήσεις, τότε $f = g$ ανν
$f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$

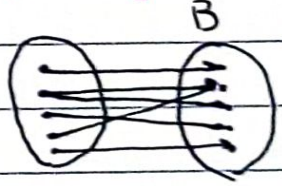
(ii) Αν $f: A \to B$ μια συναρτηση και $S \subseteq A$. Το συνολο $\{(x, f(x))\ x \in S\}$ οριζει μια συναρτηση $g: S \to B$ ωστε $g(x) = f(x)\ \forall x \in S$. Η συναρτηση συμβολιζεται με $f|S$ ή $f/_S$ και ονομαζεται περιορισμος της f στο S

(iii) Αν $\Gamma \supseteq A$
και $h: \Gamma \to B$ ωστε να ισχυει $h(x) = f(x)\ \forall x \in A$
(δηλ: $h/_A = f$)

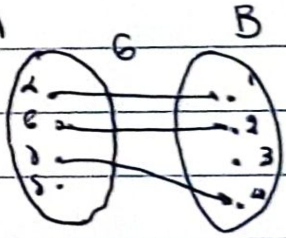


η h λεγεται επεκταση της f στο συνολο Γ

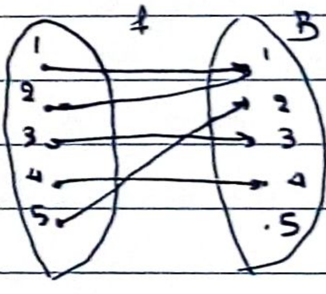
Παραδειγματα

(α)


Η r δεν ειναι συναρτηση διοτι $B r 1$, $B r 3$, $1 \neq 3$

(β)


Η σ δεν ειναι συναρτηση διοτι $\delta \in A$ και δεν υπαρχει $x \in B$ ωστε $\delta \sigma x$

(γ)


Η f ειναι συναρτηση
Η f δεν ειναι 1-1 διοτι $f(\alpha) = f(\beta)$
Η f δεν ειναι επι:
$5 \in B$ ενω $\nexists\, x \in A$ ωστε $f(x) = 5$

$[R(f) = \{1, 2, 3, 4\}]$

(δ) $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2x\}$
Η f ειναι συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
[διοτι για καθε $x \in \mathbb{R}$ υπαρχει μοναδικο $y \in \mathbb{R}$ (το $y = 2x$) ωστε $(x,y) \in f$]

$f(x) = 2x$ λεγεται τυπος της συναρτησης f
Η f ειναι 1-1 : Αν $x, y \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$
οποτε λεμε οτι ειναι 1-1

Η f ειναι επι : Εστω $y \in \mathbb{R}$, τοτε για $x = y/2$ εχουμε
$f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{2y}{2} = y.$

(ε) Μια συναρτηση f με $R(f) \subseteq \mathbb{R}$ λεγεται πραγματική συναρτηση
Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$, λεμε οτι η f ειναι πραγματικη συναρτηση πραγματικης μεταβλητης.

Για μια τετοια f μπορει να γινει η γραφική της παρασταση στο επιπεδο
$\{(x, f(x)) \ x \in A\}$

(στ) Αν A, B δυο συνολα μη κενα, $c \in B$
και $f : A \to B$ με $f(x) = c$ $\forall x \in A$ η f λεγεται σταθερη συναρτηση (με τιμη c)

(ζ) Αν $A \neq \emptyset$
η $f : A \to A$ με $f(x) = x$ $\forall x \in A$, λεγεται ταυτοτικη συναρτηση.
Αυτή συμβολιζεται με I_A, i_A

Πρόταση

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση

(α) Η αντίστροφη σχέση της f (δηλ η $f^{-1} \subseteq B \times A$) είναι συνάρτηση αν-ν η f είναι 1-1 και επί

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση

(β) Αν η f είναι 1-1 και επί (οπότε σύμφωνα με το α η f^{-1} είναι συνάρτηση $B \to A$)
τότε η f^{-1} $B \to A$ είναι 1-1 και επί, επίσης

Απόδειξη

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1 & επί
Ν.δ.ο η $f^{-1} \subseteq B \times A$ είναι συνάρτηση

(i) Έστω $y \in B$
τότε εφόσον η f είναι επί υπάρχει $x \in A$ ώστε
$f(x) = y$, δηλ. $(x,y) \in f$ άρα $(x,y) \in f^{-1}$

(ii) Έστω $x \in B$, $y, z \in A$ τ.ω $(x,y) \in f^{-1}$ και $(x,z) \in f^{-1}$
Τότε $(y,x) \in f$ και $(z,x) \in f$
δηλ $f(y) = x$ και $f(z) = x$
Άρα $f(y) = f(z)$ και εφόσον η f είναι 1-1
προκύπτει $y = z$
Επομένως η $f^{-1}: B \to A$ είναι συνάρτηση

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $f^{-1}: B \to A$ είναι συνάρτηση
Η f είναι επί:
Έστω $y \in B$. Τότε εφόσον η f^{-1} είναι συνάρτηση υπάρχει $x \in A$ τ.ω $(y,x) \in f^{-1}$
(δηλ $(x,y) \in f$, $f(x) = y$)

Η f είναι 1-1

Έστω $x, y \in A$ ώστε $f(x) = f(y)$

Θέτουμε $z = f(x) = f(y)$ και έχουμε ότι $(x,z) \in f$ & $(y,z) \in f$

Άρα $(z,x) \in f^{-1}$ & $(z,y) \in f^{-1}$

εφόσον η f^{-1} είναι συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι $x = y$

B) Η f^{-1} είναι 1-1

Έστω $x, y \in B$ ώστε $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$

Θέτουμε $z = f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$

Τότε $f(z) = x$ και $f(z) = y$

Άρα $x = y$.

Η f^{-1} είναι επί

Έστω $y \in A$. Θέτουμε $x = f(y)$ (άρα $x \in B$)

Έχουμε $f^{-1}(x) = y$

Άρα f^{-1} είναι επί